

Optimale Regelung bei quadratischem Gütekriterium

In diesem Kapitel wird ein weiteres klassisches Problem der modernen Regelungstechnik betrachtet, nämlich der Reglerentwurf durch Minimierung eines quadratischen Gütekriteriums. In diesem Zusammenhang werden wir Anforderungen an den geschlossenen Kreis nicht wie in der Vorlesung RT1 im Frequenzbereich formulieren, sondern den Regler so bestimmen, dass ein im Zeitbereich formuliertes Gütekriterium minimal wird. Zuerst betrachten wir den Fall mit Zustandsrückführung, d.h. wir nehmen an, dass der gesamte Zustandsvektor gemessen werden kann. Der sich so ergebende Reglerentwurf wird im englischen Sprachraum „Linear Quadratic Regulator“ oder kurz LQ-Regulator oder LQR genannt. Die Gründe hierfür werden im folgenden klar werden.

1 LQR Reglerentwurf

Gegeben sei das lineare zeintinvariante Mehrgrößensystem

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad \mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n, \mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^q \quad (1)$$

mit Anfangsbedingung $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$. Wir wollen nun einen linearen Zustandsregler

$$\mathbf{u} = \mathbf{K}_c \mathbf{x} \quad (2)$$

so entwerfen, dass das System aus einer beliebigen Ausgangslage $\mathbf{x}_0$ so in die Gleichgewichtslage $\mathbf{x}_s = \mathbf{0}$ überführt wird, dass das folgende quadratische Gütekriterium minimiert wird:

$$I(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}(\cdot)) = \int_0^\infty (\mathbf{x}^T(\tau) \mathbf{Q} \mathbf{x}(\tau) + \mathbf{u}^T(\tau) \mathbf{R} \mathbf{u}(\tau)) d\tau. \quad (3)$$

Der Wert des Gütekriteriums wird einerseits durch die Anfangsauslenkung $\mathbf{x}_0$ bestimmt und andererseits durch die Wahl der Stellgröße $\mathbf{u}(\cdot)$. Die Zustandsgröße $\mathbf{x}$ in (3) ergibt sich gemäß der DGL (1) eindeutig aus der Anfangsbedingung $\mathbf{x}_0$ und dem Verlauf der Stellgröße, so dass diese nicht explizit als Argument im Güteindex I vorkommt. Über das Gütefunktional (3) wird ein Kompromiß zwischen schnellem Einschwingen (ausgedrückt durch den quadratischen Term $\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x}$) und kleiner benötigter Stellenergie ($\mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u}$) formuliert. „Positive“ und „negative“ Abweichungen von der Nulllage sollen gleich gewichtet werden und speziell soll der Integrand niemals negativ werden (was einer „guten“ oder gewünschten Regelabweichung entsprechen würde). Aus diesem Grund machen wir folgende Annahmen:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T &\geq 0 && \text{(positiv semidefinit)} \\ \mathbf{R} = \mathbf{R}^T &> 0 && \text{(positiv definit)} \end{aligned}$$

Die beiden Gewichtsmatrizen sollen also symmetrisch und positiv semidefinit bzw. positiv definit sein.

Einschub: positiv definite Matrizen.

Definition 1

Eine reelle Matrix $\mathbf{A}$ heißt positiv definit, wenn für die quadratische Form

$$F(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$$

das folgende gilt:

1. $F(\mathbf{x}) > 0$ für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ und $\mathbf{x} \neq 0$
2. $F(0) = 0$.

Die Matrix A heißt positiv semidefinit, wenn das folgende gilt:

1. $F(\mathbf{x}) \geq 0$ für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ und $\mathbf{x} \neq 0$
2. $F(0) = 0$.

In analoger Weise wird *negative Definitheit* bzw. *negative Semidefinitheit* definiert. Eine Matrix, deren zugehörige quadratische Form sowohl positive wie auch negative Werte annehmen kann, wird *indefinit* genannt.

Bemerkung: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir in obiger Definition annehmen, dass die Matrix A symmetrisch ist, da beim Bilden der quadratischen Form der schiefsymmetrische Teil verschwindet.

Um die Definitheit einer symmetrischen Matrix A zu bestimmen, kann der folgende Satz herangezogen werden:

Satz 1

Eine symmetrische Matrix A ist genau dann positiv (semi)definit, wenn alle Eigenwerte von A positiv (nicht negativ) sind.

Negative (semi)Definitheit kann wieder genau analog überprüft werden. Der Beweis ist sehr einfach und besteht im Wesentlichen aus einer Transformation von A in Diagonalform, woraus das Ergebnis sofort abgelesen werden kann. Insbesondere sei hier angemerkt, dass jede symmetrische Matrix A diagonalisierbar ist und ihre Eigenvektoren senkrecht aufeinander stehen. D.h. $A = T^{-1}\Lambda T$, wobei Λ eine Diagonalmatrix ist mit den Eigenwerten von A und T eine orthogonale Matrix.

Zu jeder positive semidefiniten Matrix A existiert eine Matrix B , so dass $A = B^T B$. Die Matrix B stellt gewissermassen die "Quadratwurzel" der Matrix A dar.

Nun wenden wir uns wieder dem Reglerentwurf durch Minimieren eines quadratischen Gütekriteriums zu. Die Forderung Q positiv semidefinit garantiert also, dass der Term $\mathbf{x}^T Q \mathbf{x}$ in (3) nie negative Werte annehmen kann. Für bestimmte Zustandspunkte $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ kann $\mathbf{x}^T Q \mathbf{x}$ jedoch null werden. Dies ist in der Praxis sogar häufig der Fall, nämlich wenn z.B. die Abweichung einer Zustandskoordinate x_i von der Nulllage nicht gewichtet werden soll (d.h. eine Abweichung dieser Koordinate vom Nullwert ist uns nicht wichtig). Für die Gewichtsmatrix R der Stellgrößen fordern wir jedoch „strikte“ positive Definitheit. Es soll also keine Anteile im Stellvektor $\mathbf{u}$ geben, die nicht in die Gewichtung eingehen. Dadurch soll vermieden werden, dass diese $\mathbf{u}$ -Komponenten („ungestraft“) gegen unendlich gehen können um $\mathbf{x}^T Q \mathbf{x}$ klein zu machen.

Die Wahl von geeigneten Matrizen Q und R hängt von der vorgegebenen Regelaufgabe ab. Häufig werden diagonale Matrizen zu zufriedenstellendem Regelverhalten führen. In vielen Fällen ist es jedoch nicht einfach, die Matrizen Q und R so zu wählen, dass weitergehende Anforderungen an den geschlossenen Kreis erfüllt werden. In diesen Fällen müssen Q und R iterativ so angepaßt werden, dass der geschlossene Kreis gutes Verhalten zeigt.

Bemerkung: In der Vorlesung RT1 wurde als eines der wichtigsten Ziele beim Reglerentwurf das gute Führungs- und Störverhalten genannt. Weder bei dem in RT1 behandelten Polvorgabeverfahren noch beim hier behandelten LQR-Reglerentwurf werden Führungs- oder Störgrößen explizit berücksichtigt. Störungen oder Führungsgrößenänderungen werden nur in der Form betrachtet, dass sie das System aus seiner Gleichgewichtslage in eine unerwünschte Ausgangslage „auslenken“. Dies entspricht Delta-förmigen Zustandsstörungen, wie man aus der Laplace-transformierten Differentialgleichung der Strecke unmittelbar sehen kann. Eine delta-förmige Zustandsstörung

$\mathbf{z}(t) = \mathbf{x}(0) \cdot \delta(t)$ (oder $\mathbf{Z}(s) = \mathbf{x}(0)$) bewirkt das gleiche dynamische Verhalten, wie eine Anfangsauslenkung $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= A\mathbf{x} + B\mathbf{u} + \mathbf{z} \\ \xrightarrow{\mathcal{L}} s\mathbf{X} - \mathbf{x}(0) &= A\mathbf{X} + B\mathbf{U} + \mathbf{Z} \end{aligned} \quad (4)$$

Der folgende Satz macht Aussagen über die Lösung der gestellten Minimierungsaufgabe:

Satz 2

Ist Q symmetrisch und positiv semidefinit ($Q = Q^T \geq 0 \Rightarrow Q = M^T M$), R symmetrisch und positiv definit ($R = R^T > 0$) und ist zusätzlich das Paar (A, B) stabilisierbar und (A, M) entdeckbar, dann lautet das optimale Rückführgesetz:

$$\mathbf{u} = - \underbrace{R^{-1}B^T P}_{K_C} \mathbf{x} \quad (5)$$

wobei P die eindeutige, positiv semidefinite und symmetrische Lösung der algebraischen Matrix-Riccati-Gleichung

$$PA + A^T P + Q - PBR^{-1}B^T P = 0 \quad (6)$$

ist. Der mit diesem Rückführgesetz geschlossene Kreis ist für alle zulässigen Q, R asymptotisch stabil.

Das optimale Rückführgesetz ist also in der Tat eine lineare Zustandsrückführung, wobei die Reglermatrix K_C explizit von der Lösungsmatrix P der sogenannten Riccati-Gleichung (6) abhängt. Riccati-Gleichungen sind Matrixgleichungen, die quadratisch in der Unbekannten (hier P) sind. Sie spielen eine zentrale Rolle in der linearen Regelungstheorie und stehen außer bei LQ-Reglerentwurf z.B. auch beim Kalman-Bucy-Filter und beim H_2 - und H_∞ -Reglerentwurf (vgl. Vorlesung Robust Control) im Vordergrund. Wegen der expliziten Abhängigkeit des Reglers von der Lösung einer Riccati-Gleichung wird der LQ-Reglerentwurf im deutschen Sprachraum auch häufig "Riccati-Regler" genannt.

Bevor wir verifizieren, dass die angegebene Rückführung tatsächlich das gestellte Minimierungsproblem löst, soll noch hervorgehoben werden, dass so bestimmte Regler den Regelkreis stabilisieren, unabhängig von der Wahl bestimmter Gewichtungsmatrizen Q und R (solange die im Satz gemachten Annahmen erfüllt sind). Dies ist bemerkenswert und unterscheidet dieses Verfahren von vielen anderen Verfahren, bei denen Stabilität nicht automatisch aus dem Ansatz für die Regelgüte folgt. Man sagt deshalb auch, dass der LQ-Reglerentwurf eine *garantierte* Stabilität hat.

Beweis der Stabilität des geschlossenen Kreises: Wir beweisen zuerst, dass der geschlossene Kreis stabil ist. Hier betrachten wir den Fall, dass die Matrix P positiv definit ist. Wir zeigen, dass die Ableitung des positiv definiten Ljapunov-Funktionskandidats

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T P \mathbf{x} \quad (7)$$

entlang von Trajektorien des geschlossenen Kreises negativ definit ist. Die Matrix P in (7) ist dabei die positiv definite Lösung der algebraischen Riccati-Gleichung:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{x}) &= \dot{\mathbf{x}}^T P \mathbf{x} + \mathbf{x}^T P \dot{\mathbf{x}} \\ &= (\mathbf{x}^T A^T + \mathbf{u}^T B) P \mathbf{x} + \mathbf{x}^T P (A \mathbf{x} + B \mathbf{u}) \end{aligned} \quad (8)$$

Mit $\mathbf{u} = -R^{-1}B^T P \mathbf{x}$ ergibt sich

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{x}) &= \mathbf{x}^T A^T P \mathbf{x} - \mathbf{x}^T P B R^{-1} B^T P \mathbf{x} + \mathbf{x}^T P A \mathbf{x} - \mathbf{x}^T P B R^{-1} B^T P \mathbf{x} \\ &= \mathbf{x}^T \underbrace{(A^T P + P A - P B R^{-1} B^T P)}_{-Q} \mathbf{x} - \mathbf{x}^T P B R^{-1} B^T P \mathbf{x} \\ &= \underbrace{-\mathbf{x}^T Q \mathbf{x}}_{\leq 0} - \underbrace{\mathbf{x}^T P B R^{-1} B^T P \mathbf{x}}_{\leq 0} \leq 0 \end{aligned} \quad (9)$$

Damit haben wir Stabilität, aber noch nicht asymptotische Stabilität bewiesen. Der Beweis der asymptotischen Stabilität ist aufwändiger und soll hier nicht geführt werden.

Die Optimalitätsaussage von Satz (2) wird üblicherweise mittels Variationsrechnung oder der Hamilton-Jacobi Theorie hergeleitet. Wir wollen diesen Weg hier nicht beschreiten, sondern lediglich verifizieren, dass die Rückführung (6) tatsächlich das Gütekriterium minimiert.

Verifizierung, dass $\mathbf{u} = -R^{-1}B^T P\mathbf{x}$ das Integralkriterium minimiert:

Dazu ergänzen wir das Gütekriterium durch drei Terme. Der erste Term hat den Wert Null (siehe (6)) und der zweite und dritte Term ergeben in der Summe Null:

$$\begin{aligned} I(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}(\cdot)) &= \int_0^\infty (\mathbf{x}^T(\tau)Q\mathbf{x}(\tau) + \mathbf{u}^T(\tau)R\mathbf{u}(\tau)) d\tau \\ &\quad - \int_0^\infty \mathbf{x}^T(\tau) [PA + A^T P + Q - PBR^{-1}B^T P] \mathbf{x}(\tau) d\tau \\ &\quad - \int_0^\infty (\mathbf{u}^T(\tau)B^T P\mathbf{x}(\tau) + \mathbf{x}^T(\tau)PB\mathbf{u}(\tau)) d\tau \\ &\quad + \int_0^\infty (\mathbf{u}^T(\tau)B^T P\mathbf{x}(\tau) + \mathbf{x}^T(\tau)PB\mathbf{u}(\tau)) d\tau . \end{aligned}$$

Diese vier Integrale fassen wir nun wie folgt zusammen:

$$\begin{aligned} I(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}(\cdot)) &= - \int_0^\infty \left\{ [A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t)]^T P\mathbf{x}(t) + \mathbf{x}^T(t)P[A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t)] \right\} dt \\ &\quad + \int_0^\infty \left\{ \mathbf{u}^T(t)R\mathbf{u}(t) + \mathbf{u}^T(t)B^T P\mathbf{x}(t) + \mathbf{x}^T(t)PB\mathbf{u}(t) \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{x}^T(t)PBR^{-1}B^T P\mathbf{x}(t) \right\} dt . \end{aligned}$$

Um das erste Integral einfacher zu schreiben, stellen wir zuerst fest, dass der Integrand gerade der Ableitung der Funktion $\mathbf{x}^T P\mathbf{x}$ entlang von Trajektorien des Systems entspricht:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbf{x}^T(t)P\mathbf{x}(t) &= \dot{\mathbf{x}}^T(t)P\mathbf{x}(t) + \mathbf{x}^T(t)P\dot{\mathbf{x}}(t) \\ &= [A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t)]^T P\mathbf{x}(t) + \mathbf{x}^T(t)P[A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t)] . \end{aligned}$$

Unter der Annahme, dass der geschlossene Kreis tatsächlich stabil ist, und somit $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = 0$ gilt, ergibt sich

$$\begin{aligned} I(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}(\cdot)) &= \mathbf{x}^T(0)P\mathbf{x}(0) + \int_0^\infty \left\{ \mathbf{u}^T(t)R\mathbf{u}(t) + \mathbf{u}^T(t)B^T P\mathbf{x}(t) \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{x}^T(t)PB\mathbf{u}(t) + \mathbf{x}^T(t)PBR^{-1}B^T P\mathbf{x}(t) \right\} dt . \end{aligned}$$

Der Integrand des zweiten Integrales kann als quadratische Form geschrieben werden, woraus

$$I(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}(\cdot)) = \mathbf{x}^T(0)P\mathbf{x}(0) + \int_0^\infty [\mathbf{u}(t) + R^{-1}B^T P\mathbf{x}(t)]^T R [\mathbf{u}(t) + R^{-1}B^T P\mathbf{x}(t)] dt$$

folgt. Wegen R positiv definit ergibt sich als Bedingung für ein Minimum dieser Formulierung des Gütefunktional sofort

$$\mathbf{u}_{\text{opt}}(t) = -R^{-1}B^T P\mathbf{x}(t) ,$$

was genau dem Rückführgesetz in Satz 2 entspricht. Q.E.D.

Als Nebenresultat sehen wir auch sofort, dass der Wert des Gütefunktional bei Regelung mit dem optimalen Rückführgesetz (5) den folgenden Wert annimmt

$$I(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_{\text{opt}}(\cdot)) = \mathbf{x}^T(0)P\mathbf{x}(0) ,$$

der lediglich von der Anfangsbedingung $\mathbf{x}(0)$ und der Lösungsmatrix P der Riccati-Gleichung abhängt.

Bemerkung: Man bemerke, dass in Satz 2 als zusätzliche Annahme die Entdeckbarkeit des Paares (A, M) vorausgesetzt wird. Diese Annahme ist notwendig, um sicherzustellen, dass P eine *positiv definite* Lösung der Riccati-Gleichung ist. Es soll weiterhin hervorgehoben werden, dass man von einer quadratischen Matrizengleichung wie der Riccati-Gleichung eigentlich keine Eindeutigkeit der Lösung erwarten darf. Lediglich durch die in Satz 2 gemachten Annahmen wird dies gewährleistet.

Beispiel 1

Gegeben ist das folgende System

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad . \quad (10)$$

Man kann leicht verifizieren, dass 10 instabil (zwei Pole im Ursprung) aber steuerbar ist. Gesucht wird eine Zustandsrückführung so, dass

$$I(\mathbf{x}_0, u(\cdot)) = \int_0^\infty (\mathbf{x}^T \mathbf{x} + u^2) dt$$

minimiert wird. Es gilt also $Q = M = I$ und $R = I$ so dass die Annahmen in Satz 2 trivial erfüllt sind.

Für die unbekannte Matrix

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}$$

ergibt sich wegen (6) folgende Bedingung:

$$\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \underbrace{\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix} p_{12}^2 & p_{12}p_{22} \\ p_{12}p_{22} & p_{22}^2 \end{bmatrix}} = 0 \quad .$$

Diese Matrizengleichung muß für jede der vier Matrizenelemente erfüllt sein. Aus Symmetriegründen führen jedoch stets (nicht nur in diesem Beispiel) die Auswertung für Elemente ober- und unterhalb der Hauptdiagonalen zu den identischen Gleichungen, so dass sich hier lediglich drei Gleichungen zur Bestimmung der drei Unbekannten p_{11} , p_{12} , p_{22} ergeben.

Für das (1,1) Element:

$$1 - p_{12}^2 = 0 \implies p_{12} = 1 \quad (11)$$

Für das (1,2) Element:

$$p_{11} - p_{12}p_{22} = 0 \quad (12)$$

Für das (2,2) Element:

$$p_{12} + p_{12} + 1 - p_{22}^2 = 0$$

Mit 11 ergibt sich aus der letzten Gleichung

$$p_{22} = \sqrt{3}$$

und damit aus 12:

$$p_{11} = \sqrt{3} \quad .$$

Gleichung 11 hat auch die Lösung $p_{12} = -1$, die jedoch zu einem komplexen Rückführgesetz führt und somit ausgeschlossen werden kann. Die Lösung der Riccati-Gleichung berechnet sich somit zu

$$P = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

und das optimale Rückführgesetz lautet:

$$u(t) = - \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \quad (13)$$

Wir verifizieren noch kurz, dass der mit der Rückführung (13) geschlossenen Kreis tatsächlich asymptotisch stabil ist. Dazu berechnen wir die Dynamikmatrix A des geschlossenen Kreises:

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\sqrt{3} \end{bmatrix} . \end{aligned}$$

Das charakteristische Polynom lautet

$$s(s + \sqrt{3}) + 1 = 0,$$

woraus mit der im zwei-dimensionalen hinreichenden und notwendigen Vorzeichenbedingung die Stabilität des geschlossenen Kreises folgt.

Wie man in diesem sehr einfachen Fall bereits sehen kann, ist die analytische Berechnung der Lösung der Riccati-Gleichung mit sehr großem Aufwand verbunden, so dass man im allgemeinen einer numerischen Lösung den Vorzug geben wird. In Matlab stehen dazu sogar unterschiedliche Löser für Riccati-Gleichungen zur Verfügung.

Bemerkung: Es sei noch angemerkt, dass das hier behandelte zeitinvariante Regelproblem mit unendlichem Zeitintervall lediglich ein Spezialfall ist. Das optimale Rückführgesetz lässt sich z.B. in analoger Weise auch für lineare zeitvariante System und/oder für Gütefunktionale über einen endlichen Zeithorizont angeben. Als einzig signifikanter Unterschied ergibt sich in diesen Fällen ein zeitvariantes Rückführgesetz. Die algebraische Riccati-Gleichung (6) wird dann ersetzt durch eine Riccati-Differentialgleichung:

$$\begin{aligned} \dot{P}(t) &= -P(t)A - A^T P(t) - Q + P(t)BR^{-1}B^T P(t) \\ P(t_f) &= 0 , \end{aligned}$$

wobei t_f die Endzeit der Gütefunktion darstellt und die Matrizen A , B , Q und R zeitinvariant oder zeitvariant sein können.

Im folgenden sollen kurz weitere Eigenschaften des LQ-Reglers diskutiert werden. Wir beschränken uns dabei auf SISO-Systeme, obwohl diese Eigenschaften in sehr ähnlicher Form auch für MIMO-Systeme gelten und gehen von einem System $(A, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ aus. Diese Eigenschaften sind zum einen die garantierte *robuste* Stabilität des Regelkreises unabhängig von speziellen Eigenschaften der Strecke und unabhängig von der Wahl der Gewichtungsmatrizen Q und R und zum zweiten eine Garantie für ein Mindestmaß an Regelgüte von LQR-geregelten Systemen, ebenfalls unabhängig von der speziellen Wahl von Q und R .

Für Zustandsregler, also auch für LQ-Regler, sind nur Störungen und Unsicherheiten am Streckeneingang sinnvoll. Abbildung 1 zeigt einen Regelkreis mit Zustandsrückführung und Störungen am Streckeneingang und am Streckenausgang. Wie man deutlich erkennen kann, wird die Ausgangsstörung z_1 , nicht zurückgeführt und kann demnach durch die Regelung auch nicht beeinflusst werden. Als “loop-breaking-point” zur Berechnung der Übertragungsfunktion des offenen Kreises ist deshalb nur der Streckeneingang eine leicht zugängliche Größe (Abbildung 2). Somit lautet die interessierende Übertragungsmatrix Q' des offenen Kreises

$$Q' = K \cdot G = K_C (sI - A)^{-1} \mathbf{b} \quad (14)$$

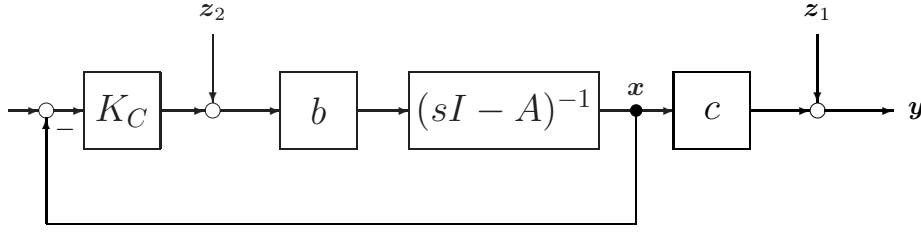


Abbildung 1: Regelkreis mit Zustandsrückführung und Störungen.

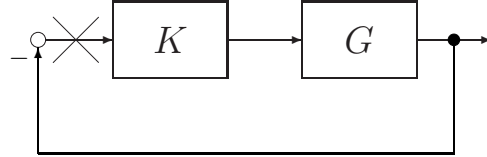


Abbildung 2: Regelkreis mit “loop-breaking-point” am Streckeneingang.

und die (Eingangs-)Rückführdifferenz ist durch

$$1 + K \cdot G \quad (15)$$

gegeben. Statt der (Ausgangs-)Sensitivitätsfunktion S mit

$$S = \frac{1}{1 + GK} \quad (16)$$

ist hier eigentlich die Eingangssensitivitätsfunktion S_i interessant

$$\begin{aligned} S_i &= \frac{1}{1 + KG} \\ &= -K_C(sI - A + bK_C)^{-1}b + 1 \quad , \end{aligned} \quad (17)$$

wobei von der Identität

$$(A + BCD)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B(DA^{-1}B + C^{-1})^{-1}DA^{-1} \quad (18)$$

Gebrauch gemacht wurde. Statt der komplementären (Ausgangs-)Sensitivitätsfunktion T betrachten wir die komplementäre Eingangssensitivitätsfunktion T_i

$$T_i = \frac{KG}{1 + KG} \quad (19)$$

Im Eingrößenfall, d.h. für $u(t) \in \mathbb{R}$, sind S_i oder S bzw T_i oder T identisch. Wir leiten nun die speziellen Robustheitsgarantien des LQ-Reglers her. Aus der Kalman Frequenzbereichsgleichung, die in der Übung bewiesen wird, folgt direkt

$$|1 + KG| = |1 + GK| \geq 1 \quad \forall \omega \quad . \quad (20)$$

Dies bedeutet, dass die Ortskurve von GK immer außerhalb eines Kreises mit Radius eins um den kritischen Punkt $(-1, 0)$ verläuft (Abbildung 3). Aus Abb. 3 folgt direkt, dass für die Amplitudenreserve des Kreises $a_R = \frac{1}{2} \dots \infty$ und für die Phasenreserve $\gamma_R = \pm 60^\circ$ gilt. Dies sind ganz stattliche Robustheitsreserven, die automatisch jeder LQR-geregelter Kreis, unabhängig von der Wahl der Gewichte Q und R und unabhängig von den speziellen Eigenschaften der Regelstrecke gelten.

Aus Gleichung 20 lassen sich noch weitere Beziehungen herleiten, die für alle LQR-geregelten Kreise gelten. So folgt direkt, dass

$$\left| \frac{1}{1 + KG} \right| \leq 1 \quad \forall \omega \quad (21)$$

gilt. Damit besitzen alle LQ-Regler, unabhängig von der jeweiligen Anwendung, neben beachtlichen Robustheitseigenschaften auch ein garantiert gutes Regelverhalten der Art, dass Eingangsstörungen unabhängig von ihrer Richtung und Frequenz nie verstärkt werden.

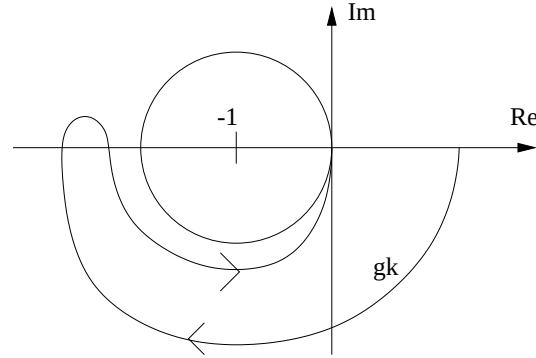


Abbildung 3: Veranschaulichung der Amplituden- und Phasenreserve von LQ-Reglern im SISO-Fall.

2 LQG-Reglerentwurf

Der Einsatz eines LQ-Reglers setzt voraus, dass alle Systemzustände gemessen und zurückgeführt werden können. In der Praxis ist dies in den allermeisten Fällen nicht möglich, so dass mit Hilfe eines Beobachters oder Filters die Zustände aus den gemessenen Größen rekonstruiert werden müssen.

Falls die Meßgrößen nicht oder nur sehr wenig verrauscht sind, empfiehlt sich die Verwendung eines Beobachters. Die Auslegung erfolgt meist nach dem Prinzip der Polvorgabe für die Fehlerdynamik, so dass Standardverfahren zur Polvorgabe auch für den Beobachterentwurf übernommen werden können. Wie beim Reglerentwurf durch Polvorgabe ein Kompromiß zwischen schnellem Einschwingverhalten und zu großen Stellamplituden gefunden werden muß (vgl. Vorlesung RT1), so ist bei der Auslegung der Dynamik des Beobachters ein Kompromiß zwischen schnellem Einschwingen des Regelfehlers und hoher Sensitivität gegenüber Meßrauschen (Pole zu weit links) zu finden.

Falls starkes Meß- und/oder Systemrauschen im System zu berücksichtigen ist, empfiehlt sich die Verwendung eines **Kalman-Bucy-Filters** (KBF), das die Zustände in einer noch näher zu spezifizierenden optimalen Weise rekonstruiert.

Wir gehen von folgendem System aus, bei dem sowohl Systemrauschen $\dot{\mathbf{w}}_t$ als auch Meßrauschen $\dot{\mathbf{v}}_t$ berücksichtigt werden

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{G}\dot{\mathbf{w}}_t \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} + \dot{\mathbf{v}}_t\end{aligned}\quad (22)$$

Dabei sind $\mathbf{w}_t$ und $\mathbf{v}_t$ sogenannte Wiener-Vektor-Prozesse, d.h. ihre Zeitableitungen stellen weißes Rauschen dar. Weißes Rauschen ist ein Prozeß der stationär, ergodisch und normalverteilt ist und den Mittelwert Null hat. Für weißes Rauschen ist die Autokorrelationsfunktion die Dirac'sche Deltafunktion bzw. die Spektraldichte ist konstant gleich Eins.

Für die stochastischen Signale $\mathbf{w}_t$ und $\mathbf{v}_t$ werden noch folgende Beziehungen angenommen:

$$\text{Autokorrelation: } E[\mathbf{w}_t \mathbf{w}_t^*] = \tilde{\mathbf{Q}} \cdot t \quad \text{mit: } \tilde{\mathbf{Q}} \dots \text{ Intensität des Systemrauschens}$$

$$\text{Mittelwert: } E[\mathbf{w}_t] = 0$$

$$\text{Autokorrelation: } E[\mathbf{v}_t \mathbf{v}_t^*] = \tilde{\mathbf{R}} \cdot t \quad \text{mit: } \tilde{\mathbf{R}} \dots \text{ Intensität des Messrauschens}$$

$$\text{Mittelwert: } E[\mathbf{v}_t] = 0$$

$$\text{Kreuzkorrelation: } E[\mathbf{w}_t \mathbf{v}_s^*] = 0 \quad .$$

Wir setzen voraus, dass alle Komponenten des Ausgangs weißes Rauschen überlagert haben und dass es unmöglich ist, aus den Meßgrößen Information zu gewinnen, die kein weißes Rauschen enthält, d.h. $\tilde{\mathbf{R}} > 0$. Da Rauschintensitäten immer nichtnegativ sind, gilt weiterhin $\tilde{\mathbf{Q}} \geq 0$.

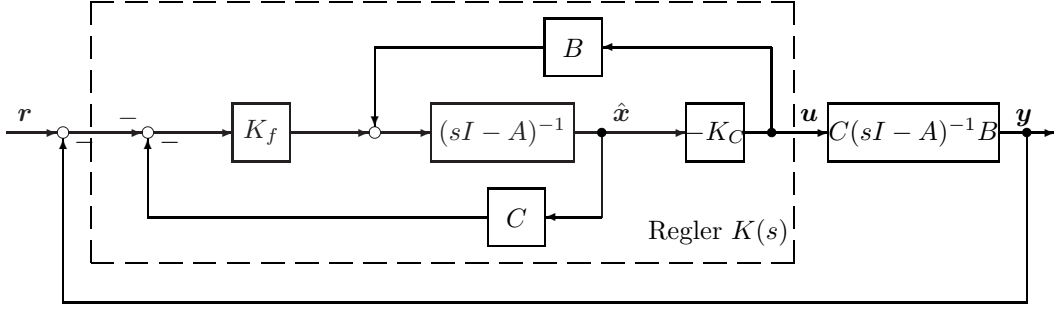


Abbildung 4: Blockschaltbild eines modellbasierten Reglers.

Satz 3

Unter der Voraussetzung, dass (A, C) entdeckbar und (A, G) stabilisierbar ist, ist das stationäre Kalman-Bucy-Filter für das betrachtete System gegeben durch die Differentialgleichung

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + K_f(y - C\hat{x}) \quad (23)$$

mit

$$K_f = \Sigma C^T \tilde{R}^{-1} \quad (24)$$

wobei Σ die eindeutige, symmetrische, positiv semidefinite Lösung der algebraischen Beobachter-Riccati-Gleichung

$$0 = A\Sigma + \Sigma A^T + G\tilde{Q}G^T - \Sigma C^T \tilde{R}^{-1} C \Sigma \quad (25)$$

ist. Die Dynamik des Beobachterfehlers $x - \hat{x}$ ist für jede zulässige Wahl von $\tilde{R}$, $\tilde{Q}$ asymptotisch stabil.

Man kann nun zeigen[3], dass von allen Möglichkeiten, aus der Kenntnis der Meßgröße y und der Eingangsgröße u der Zustand zu rekonstruieren, das Kalman-Bucy-Filter den kleinsten mittleren Erwartungswert für den quadratischen Beobachtungsfehler hat:

$$E[(x - \hat{x})^T(x - \hat{x})] = \min \quad . \quad (26)$$

Das schließt auch alle nichtlinearen Möglichkeiten, den Zustand zu rekonstruieren, ein, gilt aber streng genommen nur für das nichtstationäre Kalman-Bucy-Filter unter der Voraussetzung normalverteilter Anfangsbedingungen $x(0)$.

An der Struktur des stationären Kalman-Bucy-Filters (23), das auch Wiener-Filter genannt wird, erkennt man, dass dieses nichts anderes als ein speziell entworfener Beobachter ist.

Den aus Kalman-Bucy-Filter und LQ-Regler bestehenden Gesamtregler bezeichnet man als LQG-Regler. Dabei steht der Buchstabe 'G' für 'Gaussian', was andeuten soll, dass das angenommene Rauschen 'weiß' (engl. 'Gaussian') ist. Seine Struktur ist in Abbildung 4 angegeben. Unabhängig von der Art, wie die Matrizen K_f und K_C entworfen werden, bezeichnet man einen Regler mit dieser Struktur als *modellbasierten Regler*, da ein Modell der Strecke (A, B, C) im Regler enthalten ist. Die Reglerübertragungsfunktion $U(s) = K(s)(R(s) - Y(s))$ ergibt sich mit

$$U(s) = -K_C \hat{X}(s) \quad (27)$$

und

$$\hat{X}(s) = (sI - A)^{-1} \left\{ B(-K_C) \hat{X}(s) + K_f(Y(s) - R(s) - C\hat{X}(s)) \right\} \quad (28)$$

zu

$$K(s) = K_C(sI - A + BK_C + K_f C)^{-1} K_f \quad . \quad (29)$$

Dabei sind $\mathbf{U}(s)$, $\mathbf{R}(s)$, $\mathbf{Y}(s)$ und $\hat{\mathbf{X}}(s)$ die Laplace-transformierten Größen von $\mathbf{u}(t)$, $\mathbf{r}(t)$, $\mathbf{y}(t)$ und $\hat{\mathbf{x}}(t)$. Der (optimale) LQ-Regler K_C stabilisiert den geschlossenen Kreis, wenn die Zustände gemessen werden können. Es stellt sich natürlich die Frage, ob diese Stabilitätseigenschaft durch die Zustandsrekonstruktion mit Beobachter oder KBF verlorengeht. Das aus Regelungstechnik I bekannte Separationsprinzip macht Aussagen über die nominelle Stabilität des mit einem modellbasierten Regler geregelten Kreises.

Satz 4 (Separationsprinzip)

Die $2n$ Pole des mit (29) geregelten Kreises setzen sich aus den n Polen des optimalen LQR-Regelkreises (also den Eigenwerten von $(A - BK_C)$) plus den n Polen des Beobachters/KBF (also den Eigenwerten von $(A - K_f C)$) zusammen.

Beweis:

siehe Regelungstechnik I. □

Man kann also, wenn man nur an der Stabilität des nominellen Gesamtregelkreises interessiert ist, den Zustandsregler unabhängig vom Beobachter/KBF entwerfen. Daher auch der Name Separationsprinzip.

Der mit dem Gesamtregler $K(s)$ geregelte Kreis ist also nominell immer stabil. Allerdings kann der Regler $K(s)$ selbst instabil sein. Dies ist erfahrungsgemäß sogar häufig der Fall. In diesem Fall wird der instabile Regler durch die Strecke stabilisiert. Die Implementierung eines instabilen Reglers kann aber, außer in begründeten Ausnahmefällen, nicht empfohlen werden.

Im vorangegangenen Kapitel haben wir gesehen, dass jeder LQR-Regler automatisch ganz beträchtliche Robustheitsgarantien hat. Dies ist beim LQG-Regler *nicht* mehr der Fall. Ein Gegenbeispiel ist z.B. in [2] angegeben. D.h. der große Vorteil des LQR-Verfahrens, die robust erreichte Stabilität, wird durch die Verwendung eines Beobachters oder Kalman-Bucy-Filters „zuerstört“. Das heißt natürlich nicht, dass alle LQG-Regler schlechte Robustheitseigenschaften aufweisen. Vielmehr hängt beim LQG-Regler die Robustheit von der Wahl der Gewichtungsmatrizen Q , R , $\tilde{Q}$ und $\tilde{R}$ ab. Man muß die Robustheit also nach jeder Entwurfsiteration mit den in Regelungstechnik I oder später in der Vorlesung Robust Control behandelten Methoden nachprüfen und gegebenenfalls einen neuen Regler entwerfen.

Zusammenfassend ist das LQG-Verfahren ein Reglerentwurfswerkzeug, mit dem nominell Stabilität des geschlossenen Regelkreises einfach erreicht werden kann. Weitere Ziele, wie Robustheit und gutes Regelverhalten, können jedoch im allgemeinen nicht sehr leicht erreicht werden, da im Ausgangsrückführungsteil kein einfacher Zusammenhang zwischen der Wahl der Gewichtungsmatrizen Q , R und $\tilde{Q}$, $\tilde{R}$ und den Anforderungen an den geschlossenen Kreis besteht. Um gute nominelle und robuste Regelkreiseigenschaften zu erzielen, sind im allgemeinen viele Entwurfsiterationen mit unterschiedlichen Gewichtungsmatrizen Q , R , $\tilde{Q}$ und $\tilde{R}$ nötig. Stellgrößenbeschränkungen können jedoch durch das quadratische Gütekriterium in indirekter Weise beim Entwurf berücksichtigt werden. In der Vorlesung Robust Control wird eine Erweiterung des LQG-Verfahrens behandelt, das sowohl Robustheit garantiert, wie auch die gezielte Wahl der Gewichtsmatrizen Q , R , $\tilde{Q}$, $\tilde{R}$ im Hinblick auf das Erreichen bestimmter Regelungsziele erlaubt. Diese Verfahren wird LQR/LTR-Verfahren (Linear Quadratic Gaussian with Loop Transfer Recovery) genannt[1].

Literatur

- [1] M. Athans. A tutorial on the LQG/LTR method. In *Proceedings of the American Control Conference*, pages 1289–1296, Seattle, WA, 1986.
- [2] J. C. Doyle and G. Stein. Multivariable feedback design: Concepts for a classical/modern synthesis. *IEEE Trans. Autom. Contr.*, AC-26:4–16, 1981.
- [3] H. Kwakernaak and R. Sivan. *Linear Optimal Control Systems*. Wiley, New York, 1972.